[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/prep_qf.asp) • [Препринт № 88 за 2015 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-88)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Аптекарев А.И., Денисов С.А.,
Ятцелев М. Л.

Вполне интегрируемые на Z^d_+ потенциалы для электромагнитного оператора Шрёдингера: лучевые асимптотики и задача рассеяния

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Денисов С.А., Ятцелев М. Л. Вполне интегрируемые на Z^d_+ потенциалы для электромагнитного оператора Шрёдингера: лучевые асимптотики и задача рассеяния // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 88. 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-88

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев, С. А. Денисов, М. Л. Ятцелев

Вполне интегрируемые на $\mathbb{Z}_+^d$ потенциалы для электромагнитного оператора Шрёдингера: лучевые асимптотики и задача рассеяния

Москва — 2015

УДК 517.53+517.9

Аптекарев А. И., Денисов С. А., Ятцелев М. Л.

Вполне интегрируемые на $\mathbb{Z}_+^d$ потенциалы для электромагнитного оператора Шрёдингера: лучевые асимптотики и задача рассеяния. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2015

Рассматривается электромагнитный оператор Шрёдингера в $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$ с потенциалом, удовлетворяющим дискретной интегрируемой системе, связанной с совместно ортогональными многочленами относительно системы мер Анжелеско. Решается задача о нахождении предела потенциала вдоль лучей в $\mathbb{Z}_+^d$. Также обсуждается постановка и решение задачи рассеяния.

Ключевые слова: Разностные операторы; совместно ортогональные многочлены; дискретные интегрируемые системы; задача рассеяния.

Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.

Completely integrable on $\mathbb{Z}_+^d$ potentials for electromagnetic Schrodinger operator: rays asymptotics and scattering problem. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2015

The electromagnetic Schrodinger operator in $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$ is considered. The potential satisfies to a discrete integrable system related with multiple orthogonal polynomials with respect to the Angelesco system of measures. The problem on limits of the potential along the rays in $\mathbb{Z}_+^d$ is solved. A statement and solution of the scattering problem is considered as well.

Key words: Difference operator; multiple orthogonal polynomials; discrete integrable systems; scattering problem.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

Оглавление

1. Введение

Многомерный *дискретный электромагнитный оператор Шрёдингера*, см. [14], [17], действует на функции $u(x)$, определенные на решетке $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\widetilde{\Delta}_s u = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2m_k}(V_{e_k} - A_k I)(V_{-e_k} - \bar{A}_k I)u + \Phi u, \tag{1.1}$$

где $(V_{e_k}u)(x) := u(x - e_k)$ и $(V_{-e_k}u)(x) := u(x + e_k)$ операторы сдвига на $\mathbb{Z}^d$, e_k– стандартный базисный вектор (т.е. k-тая координата 1, остальные 0), m_k – масса k-ой частицы, Φ – потенциал электрического поля, а вектор-функция $\vec{A} = (A_1, \cdots, A_d)$ есть магнитный потенциал. Если Φ и $(A_1, \cdots, A_d)$ действительнозначны, тогда $\widetilde{\Delta}_s$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$, и он имеет вид:

$$-\widetilde{\Delta}_s u(x) = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{A_k}{2m_k} u(x + e_k) - \left(\frac{1 + A_k^2}{2m_k} + 2\Phi(x) \right) u(x) + \frac{A_k}{2m_k} u(x - e_k) \right).$$

В работе [2] рассматривался (более общий, чем (1.1)) оператор Δ_s, действующий на $f := \{f_{\vec{n}}\}_{\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^d} \,:\, f \in \ell_2(\mathbb{Z}_+^d)$ следующим образом

$$(\Delta_s f)_{\vec{n}} = \sum_{k=1}^{d} \left(\sqrt{\frac{\alpha_{\vec{n}+e_k,k}}{d}} f_{\vec{n}+e_k} + \sqrt{\frac{\alpha_{\vec{n},k}}{d}} f_{\vec{n}-e_k} \right) + \frac{\tilde{\beta}_{\vec{n}}}{d} f_{\vec{n}}, \quad \alpha_{\vec{n},k} > 0. \tag{1.2}$$

В одномерной ситуации $d = 1$ оператор (1.2) превращается в матрицу Якоби

$$(Jf)_n = \sqrt{\alpha_{n+1}}\, f_{n+1} + \beta_n\, f_n + \sqrt{\alpha_n}\, f_{n-1}, \qquad \alpha_n > 0, \;\; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.3}$$

состоящую из коэффициентов рекуррентных соотношений последовательности многочленов $\{q_n(x)\}$, ортонормированных относительно спектральной меры $\sigma_i(x)$ оператора $J : \ell_2(\mathbb{Z}_+) \to \ell_2(\mathbb{Z}_+)$:

$$J\vec{q} \,=\, x\,\vec{q}, \qquad \vec{q} := (q_0(x), q_1(x), \cdots)^T. \tag{1.4}$$

Соответствующие рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов со старшим коэффициентом единица $Q_n(x) = x^n + ...$ имеют вид

$$zQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + \beta_n Q_n(x) + \alpha_n Q_{n-1}(x). \tag{1.5}$$

Для описания класса многомерных разностных операторов (1.2), имеющих полиномиальный обобщенный собственный вектор (аналогичный (1.4)), в [2] было предложено использовать решетки $\{Q_{\vec{n}}\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$ Совместно Ортогональных Многочленов (СОМ-ов) относительно системы $\{\sigma_i\}_{i=1}^d$, борелевских мер

$$\int Q_{(n_1,\ldots,n_p)}(x)x^k \mathrm{d}\sigma_i = 0, \quad k\in\{0,\ldots,n_i-1\}, \quad i\in\{1,\ldots,d\}. \tag{1.6}$$

Для любого мультииндекса $\vec{n}=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathbb{Z}_+^d$ в качестве $Q_{\vec{n}}$ берем многочлен минимальной степени, удовлетворяющий (1.6). Такой многочлен всегда существует, и он единственный. Мы говорим, что мультииндекс $\vec{n}$ *нормальный*, если $\mathsf{deg}(Q_{\vec{n}}) = |\,\vec{n}\,|$, где $|\,\vec{n}\,| := n_1+\cdots+n_p$. Если все мультииндексы решетки нормальны, то систему мер $\{\sigma_i\}_{i=1}^d$ называют *совершенной*. Известно [11, 18], что СОМ-ы для совершенных систем удовлетворяют рекуррентным соотношениям, связывающим ближайших соседей.

$$zQ_{\vec{n}}(z) = Q_{\vec{n}+\vec{e}_j}(z) + \beta_{\vec{n},j}Q_{\vec{n}}(z) + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{\vec{n},i}Q_{\vec{n}-\vec{e}_i}(z). \tag{1.7}$$

Отметим основные моменты, позволяющие связать оператор Δ_s (1.2) с рекуррентными соотношениями для СОМ-ов (1.7) (детали см. в [2]).

- Если коэффициенты оператора (1.2) удовлетворяют

$$\frac{\alpha_{\vec{n}+\vec{1},i}}{\alpha_{\vec{n}+e_i,i}} = \frac{\alpha_{\vec{n}+\vec{1},j}}{\alpha_{\vec{n}+e_j,j}}\ , \quad i,j=1,\ldots,d, \quad \vec{1}=(1,\ldots,1)\ , \tag{1.8}$$

  то Δ_s допускает десимметризацию (аналог перехода (1.3) $\to$ (1.5)):

$$(\Delta f)_{\vec{n}} = \sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{d}\,f_{\vec{n}+e_k} + \alpha_{\vec{n},k}\,f_{\vec{n}-e_k}\right) + \frac{\tilde{\beta}_{\vec{n}}}{d}\,f_{\vec{n}}\ . \tag{1.9}$$

- Если кроме (1.8) коэффициенты оператора (1.2) удовлетворяют

$$\frac{\alpha_{\vec{n}+\vec{1},i}}{\alpha_{\vec{n}+e_i,i}} \neq 1\ , \quad i=1,\ldots,d, \quad d>1\ , \tag{1.10}$$

  то оператор (1.9) допускает декомпозицию в d операторов

$$(H_j f)_{\vec{n}} = f_{\vec{n}+e_j} + \beta_{\vec{n},j}f_{\vec{n}} + \sum_{k=1}^{d}\alpha_{\vec{n},k}\,f_{\vec{n}-e_k}\ , \quad \sum_{j=1}^{d}\beta_{\vec{n},j} = \tilde{\beta}_{\vec{n}}\ , \tag{1.11}$$

  где $j=1,\ldots,d$, а выражения для $\beta_{\vec{n},j}$ через $\{\alpha_{\vec{n},k}\}$ см. в [2].

- Разбиение $\sum_{j=1}^{d}\beta_{\vec{n},j}=\tilde{\beta}_{\vec{n}}$ также позволяет записать оператор Δ_s в виде суммы (по каждой координате решетки) d одномерных операторов

$$\Delta_s=\sum_{k=1}^{d}J_k, \tag{1.12}$$

задаваемых матрицами Якоби (1.3)

$$(J_kf)_{\vec{n}}=\sqrt{\frac{\alpha_{\vec{n}+e_k,k}}{2}}f_{\vec{n}+e_k}+\frac{\beta_{\vec{n},k}}{2}f_{\vec{n}}+\sqrt{\frac{\alpha_{\vec{n},k}}{2}}f_{\vec{n}-e_k}.$$

- Для того чтобы набор операторов $\{H_j\}_{j=1}^{d}$ отображал однозначно f из $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$ в $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$ должно выполняться

$$\begin{aligned}
&\nabla_j\beta_{\vec{n},i}=\nabla_i\beta_{\vec{n},j},\\
&\beta_{\vec{n},i}\nabla_j\beta_{\vec{n},i}-\beta_{\vec{n},j}\nabla_i\beta_{\vec{n},j}=\left\langle(\vec{\nabla}_j-\vec{\nabla}_i),\,\vec{\alpha}_{\vec{n}}\right\rangle,\\
&(\nabla_i\ln)\alpha_{\vec{n},j}=(\nabla_j\ln)\,(\beta_{\vec{n}-e_j,i}-\beta_{\vec{n}-e_j,j}),
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где мы обозначаем

$$\nabla_j\beta_{\vec{n},i}:=\beta_{\vec{n}+e_j,i}-\beta_{\vec{n},i},\quad \vec{\nabla}_i:=(\nabla_i,\cdots,\nabla_i),\quad (\nabla_i\ln)\alpha_{\vec{n}}:=\left(\frac{\alpha_{\vec{n}+e_j}}{\alpha_{\vec{n}}}-1\right).$$

Теперь, если мы возьмем решетку СОМ-ов $\pi:=\{Q_{\vec{n}}\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$, определяемых рекуррентными соотношениями (1.7), коэффициенты которых удовлетворяют условиям совместности (1.13), то эта полиномиальная решетка будет обобщенным собственным вектором для операторов (1.9), (1.11)

$$\Delta\pi(z)=z\pi(z),\qquad H_j\pi(z)=z\pi(z),\quad j=1,\cdots,d,$$

а после перенормировки

$$Q_{\vec{n}}^{(s)}(z)=\frac{1}{h_{\vec{n}}}Q_{\vec{n}}(z),\qquad h_{\vec{n}}:\ \sqrt{2\alpha_{\vec{n},j}}=\frac{h_{\vec{n}}}{h_{\vec{n}-e_j}},\ h_{\vec{0}}=1,$$

решетка многочленов $\pi^{(s)}:=\{Q_{\vec{n}}^{(s)}\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$ становится обобщенным собственным вектором для оператора (1.2)

$$\Delta_s\pi^{(s)}(z)=z\pi^{(s)}(z),$$

Итак, мы имеем несколько переформулировок (1.2), (1.9), (1.11) многомерного разностного оператора 2-го порядка, имеющего полиномиальный обобщенный собственный вектор. Отличительной чертой этих операторов является то, что их коэффициенты (*потенциалы*) удовлетворяют системе * разностных уравнений (1.13), которая, как показано в [3], является *Дискретной Интегрируемой Системой* (ДИС), и простой алгоритм решает её граничную задачу

$$\left\{\alpha_{\vec{0}+ne_k,k},\beta_{\vec{0}+ne_k,k}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \quad \to \quad \left\{\alpha_{\vec{n},k},\beta_{\vec{n},k}\right\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}, \quad k=1,\cdots,d\,. \tag{1.14}$$

Отметим, что на границе решетки $\mathbb{Z}_+^d$, т.е. на d лучах вида $(\vec{0}+n\,e_k)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $k=1,\cdots,d$ в разбиениях (1.12) оператора Δ_s остается только по одному слагаемому, которые мы будем называть *маргинальными матрицами Якоби* оператора Δ_s

$$(JM_kf)_n=\sqrt{\alpha_{\vec{0}+(n+1)e_k,k}}\,f_{\vec{0}+(n+1)e_k}+\beta_{\vec{0}+ne_k,k}\,f_{\vec{0}+ne_k}+\sqrt{\alpha_{\vec{0}+ne_k,k}}\,f_{\vec{0}+(n-1)e_k}, \tag{1.15}$$

причем граничные данные для ДИС (1.13), (1.14) задаются коэффициентами матриц (1.15).

В связи с тем, что маргинальные операторы Якоби восстанавливают весь оператор Δ_s с помощью ДИС (1.13), (1.14), представляется естественным взять в качестве *спектральных данных оператора* Δ_s с потенциалом (1.13) *спектральные меры* его маргинальных операторов Якоби

$$\{\sigma_i\}_{i=1}^d. \tag{1.16}$$

Обратим внимание на то, что система мер (1.16) является системой мер совместной ортгональности (1.6), генерирующей СОМ-ы – обобщенные собственные вектора рассматриваемых здесь многомерных разностных операторов. При этом любопытно отметить, что понятие совершенности системы мер (1.16)(возникшее в теории диофантовых аппроксимаций, см. [12]) эквивалентно глобальной разрешимости граничной задачи для ДИС (1.13), (1.14).

В настоящей работе мы (будучи мотивированы спектральной интерпретацией многомерных дискретных операторов) рассматриваем операторы, порожденные одной известной совершенной системой мер, т.н. системой Анжелеско, см. [1]. В следующих двух секциях 2 и 3 мы решаем задачу нахождения пределов потенциала при стремлении к бесконечности вдоль "лучей" решетки $\mathbb{Z}_+^d$ вида $n_i=c_i|\vec{n}|+o\left(|\,\vec{n}\,|\right)$, $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_d)\in\big(0{,}1\big)^d$, $|\vec{c}|=1$. Входными данными для этой задачи (как и при $d=1$) являются носители спектральных

* При выполнении дополнительных условий (1.8), (1.10) в [2] приведена эквивалентная форма (1.13), использующая лишь коэффициенты Δ_s, т.е. $\alpha_{\vec{n},i}$ и $\beta_{\vec{n}}$.

мер (1.16). В заключительной секции 4 мы вкратце обсудим постановку и решение задачи рассеяния. Здесь речь пойдет о связи асимптотик обобщенного собственного вектора $\pi(\vec{n})$ вдоль "лучей" со спектральными мерами (1.16), о возможности восстановления спектральных данных по данным рассеяния, а также о функции Грина для оператора Шредингера на конечной подрешетке.

2. Асимптотика рекуррентных коэффициентов

Одна из целей этой работы – исследовать асимптотику коэффициентов $\{\alpha_{\vec{n},i}, \beta_{\vec{n},i}\}$ рекуррентных соотношений (1.7) при росте $|\,\vec{n}\,|$. Задача решается при некоторых ограничениях как на характер роста $|\,\vec{n}\,|$, так и на меры σ_i.

В дальнейшем мы предполагаем, что меры $\{\sigma_i\}$ образуют *систему Анжелеско,* т.е.

$$\mathsf{supp}(\sigma_i) = [a_i, b_i], \quad \text{и} \quad [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \varnothing, \quad \text{когда} \quad i \neq j. \tag{2.1}$$

Кроме того, мы ограничиваемся рассмотрением последовательностей, таких, что

$$n_i = c_i|\,\vec{n}\,| + o\,(|\,\vec{n}\,|)\,, \qquad \vec{c} = (c_1, \ldots, c_d) \in \big(0{,}1\big)^d, \quad |\,\vec{c}\,| = 1. \tag{2.2}$$

В этой секции мы сформулируем полученные результаты, для чего нам нужно обсудить ряд понятий, введенных Гончаром и Рахмановым [9] и связанных со *слабыми асимптотиками* многочленов $Q_{\vec{n}}$.

Зафиксируем $\vec{c}$ в (2.2) и определим

$$M_{\vec{c}}\big(\{a_i, b_i\}_1^p\big) := \big\{\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) : \ \nu_i \in M_{c_i}(a_i, b_i), \ i \in \{1, \ldots, d\}\big\},$$

где $M_c(a, b)$ – множество положительных борелевских мер массы c с носителем на $[a, b]$. Известно, что существует единственный вектор мер $\vec{\omega} \in M_{\vec{c}}\big(\{a_i, b_i\}_1^d\big)$, такой, что

$$I[\,\vec{\omega}\,] = \min_{\nu \in M_{\vec{c}}(\{a_i, b_i\}_1^d)} I[\,\vec{\nu}\,], \qquad I[\,\vec{\nu}\,] := \sum_{i=1}^{d} \left(2I[\nu_i] + \sum_{k \neq i} I[\nu_i, \nu_k]\right), \tag{2.3}$$

где $I[\nu_i] := I[\nu_i, \nu_i]$ и $I[\nu_i, \nu_k] := -\int\int \log|z - t| \mathrm{d}\nu_i(t) \mathrm{d}\nu_k(z)$. Носитель меры ω_i, вообще говоря, не обязательно заполняет весь интервал $[a_i, b_i]$ (так называемый *эффект сталкивания*), но всегда справедливо

$$\mathsf{supp}(\omega_i) = [a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}] \subseteq [a_i, b_i], \qquad i \in \{1, \ldots, d\}. \tag{2.4}$$

Предположим далее, что меры $\{\sigma_i\}$ в дополнении к (2.1) удовлетворяют $\sigma_i' > 0$ почти всюду на $[a_i, b_i]$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Для последовательности мультииндексов $\mathcal{N}$, удовлетворяющих (2.2), основной результат [9] утверждает, что

$$\lim_{\mathcal{N}} |\,\vec{n}\,|^{-1} \log |Q_{\vec{n}}(z)| = \sum_{i=1}^{d} \int \log |z-x| \mathrm{d}\omega_i(x) \tag{2.5}$$

локально равномерно непрерывно в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$.

Для описания асимптотики рекуррентных коэффициентов нам понадобится $(d+1)$-листная компактная риманова поверхность, назовем ее $\mathfrak{R}$, которую мы строим следующим образом. Возьмем $d+1$ копию $\overline{\mathbb{C}}$. Разрежем одну из них вдоль объединения отрезков $\bigcup_{i=1}^{d} \big[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\big]$, которую теперь будем обозначать $\mathfrak{R}^{(0)}$. Каждую из оставшихся копий разрежем вдоль одного отрезка $\big[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\big]$ так, что никакие из двух копий не содержат одинаковый разрез, и обозначим их $\mathfrak{R}^{(i)}$. Для образования $\mathfrak{R}$, берем $\mathfrak{R}^{(i)}$ и склеиваем берега разрезов $\big[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\big]$ (крест накрест) с берегами соответствующего разреза на $\mathfrak{R}^{(0)}$. Легко проверяется, что род построенной таким образом римановой поверхности равен нулю. Стандартную проекцию с $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим через π. Мы также будем использовать обозначение $z^{(i)}$ для точек, принадлежащих $\mathfrak{R}^{(i)}$, для которых $\pi(z^{(i)}) = z$.

Так как род $\mathfrak{R}$ равен нулю, можно произвольно задать два множества: нулей / полюсов, и если их число конечно и одинаково, то на $\mathfrak{R}$ однозначно (с точностью до мультипликативной константы) будет определена мероморфная (*рациональная*) функция. Таким образом, мы определяем Υ_i, $i \in \{1, \cdots, d\}$, рациональные функции на $\mathfrak{R}$ с простым нулем в точке $\infty^{(0)}$, простым полюсом в $\infty^{(i)}$ и ограниченной, не обращающейся в нуль в других точках. Мы фиксируем Υ_i нормировкой $\Upsilon_i(z^{(i)})/z \to 1$ при $z \to \infty$. Сформулируем основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть $\{\sigma_i\}_{i=1}^{d}$ – система мер, удовлетворяющая* (2.1), *а также*

$$\mathrm{d}\sigma_i(x) = \rho_i(x)\mathrm{d}x, \tag{2.6}$$

где ρ_i – голоморфная, не равная нулю в некоторой окрестности $[a_i, b_i]$ функция. Далее, пусть $\mathcal{N}_{\vec{c}} = \{\,\vec{n}\,\}$ будет последовательностью мультииндексов, удовлетворяющих (2.2) *для некоторого $\vec{c} \in (0,1)^d$.*

Тогда для коэффициентов $\big\{\alpha_{\vec{n},j}, \beta_{\vec{n},j}\big\}$ рекуррентных соотношений (1.7) *для СОМ-ов* (1.6) *справедливо*

$$\lim_{\mathcal{N}_{\vec{c}}} \alpha_{\vec{n},i} = \alpha_{\vec{c},i} \quad \textit{and} \quad \lim_{\mathcal{N}_{\vec{c}}} \beta_{\vec{n},i} = \beta_{\vec{c},i}, \quad i \in \{1, \cdots, d\}, \tag{2.7}$$

где $\alpha_{\vec{c},i}$ и $\beta_{\vec{c},i}$ – постоянные, такие, что $\boldsymbol{z}^2\Upsilon_i(z^{(0)}) = \alpha_{\vec{c},i}(z + \beta_{\vec{c},i}) + \mathcal{O}\big(z^{-1}\big)$ при $z \to \infty$.

Рекуррентные соотношения (1.7), связывающие ближайших соседей решетки, приводят ко многим другим рекурренциям для СОМ-ов (1.6). В частности, т.н. *лестничные*, или *step-line recurrence*. Заданный мультииндекс $n \in \mathbb{N}$, может быть единственным образом представлен как $n = md + i$, $i \in \{0, \cdots, d-1\}$. Выделим в решетке СОМ-ов последовательность

$$P_n(z) = Q_{\vec{i}(n)}(z), \quad \vec{i}(n) := \big(\underbrace{m+1, \ldots, m+1}_{i \text{ раз}}, \underbrace{m, \ldots, m}_{d-i \text{ раз}}\big), \quad |\,\vec{i}(n)\,| = n. \tag{2.8}$$

Известно [4], что последовательность многочленов P_n удовлетворяет $(d+2)$-членному рекуррентному соотношению

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^{d} \gamma_{n,k} P_{n-k}(z). \tag{2.9}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.2. *Пусть* $\{P_n\}$ *определено в* (2.8), *а* $\{\gamma_{n,k}\}$ *в* (2.9).

Если положить $\alpha_j := \alpha_{\vec{c},j}$, $\beta_j := \beta_{\vec{c},j}$ *и* $\vec{c} = (1/d, \ldots, 1/d)$, *тогда для* $i \in \{0, \cdots, d-1\}$ *справедливо, что*

$$\lim_{m\to\infty} \begin{cases} \gamma_{mp+i,0} = \beta_{i+1}, \\ \gamma_{mp+i,1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p, \\ \gamma_{mp+i,k} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \prod_{l=0}^{k-2} (\beta_j - \beta_{i-l}), \quad k \in \{2, \cdots, d\}, \end{cases} \tag{2.10}$$

где нижний индекс у β *принимает значения циклично, т.е.* $\beta_{-j} = \beta_{d-j}$ *при* $j \in \{0, \ldots, d-1\}$.

В частности, при $d = 2$, получаем из Теоремы 2.2

Следствие 2.1. *Пусть* $\{P_n\}$ *заданы* (2.8) *при* $d = 2$. *Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \begin{cases} \gamma_{2m+i,0} = \beta_{i+1}, \\ \gamma_{2m+i,1} = \alpha_1 + \alpha_2, \\ \gamma_{2m+i,2} = (-1)^i \alpha_{i+1} \big(\beta_1 - \beta_2\big). \end{cases}$$

3. Доказательства Теорем 2.1 и 2.2

3.1. Матричная задача Римана-Гильберта для СОМ-ов. Сначала мы рассмотрим обобщение для СОМ-ов [8], ставшего уже классическим подхода Итса, Китаева и Фокаса [6, 7], связывающего ортогональные многочлены и Матричную задачу Римана-Гильберта.

Предложение 3.1. *Даны меры* $\{\sigma_i\}_{i=1}^d$*, удовлетворяющие* (2.1) *и* (2.6)*. Пусть* $Q_{\vec{n}}$ *– многочлены, задаваемые* (1.6)*, а*

$$R_{\vec{n}}^{(i)}(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{x-z} \mathrm{d}\sigma_i(x),$$

их функции второго рода. Пусть мультииндекс $\vec{n}$ *таков, что*

$$\mathsf{deg}(Q_{\vec{n}}) = |\,\vec{n}\,| \quad \text{и} \quad R_{\vec{n}-\vec{e}_i}^{(i)}(z) = \frac{1}{m_{\vec{n},i} z^{n_i}} + \mathcal{O}\left(z^{-n_i-1}\right) \quad as \quad z \to \infty, \tag{3.1}$$

$i \in \{1, \cdots, d\}$*, для некоторых ограниченных ненулевых констант* $m_{\vec{n},i}$*. Положим*

$$\boldsymbol{Y}_{\vec{n}} := \begin{pmatrix} Q_{\vec{n}} & R_{\vec{n}}^{(1)} & \cdots & R_{\vec{n}}^{(d)} \\ m_{\vec{n},1} Q_{\vec{n}-\vec{e}_1} & m_{\vec{n},1} R_{\vec{n}-\vec{e}_1}^{(1)} & \cdots & m_{\vec{n},1} R_{\vec{n}-\vec{e}_1}^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{\vec{n},d} Q_{\vec{n}-\vec{e}_d} & m_{\vec{n},d} R_{\vec{n}-\vec{e}_d}^{(1)} & \cdots & m_{\vec{n},d} R_{\vec{n}-\vec{e}_d}^{(d)} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Тогда $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$ *решает следующую задачу Римана–Гильберта (*RHP-$\boldsymbol{Y}$*):*

(a) $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$ *аналитична в* $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^d [a_i, b_i]$ *и* $\lim\limits_{z\to\infty} \boldsymbol{Y}_{\vec{n}}(z) z^{-\sigma(\vec{n})} = \boldsymbol{I}$*, где* $\boldsymbol{I}$ *есть единичная матрица и* $\sigma(\,\vec{n}\,) := \mathsf{diag}\,(|\,\vec{n}\,|, -n_1, \ldots, -n_d)$*;*

(b) $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$ *имеет непрерывные предельные значения на каждом* (a_i, b_i)*, которые удовлетворяют краевым условиям* $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}+} = \boldsymbol{Y}_{\vec{n}-}\big(\boldsymbol{I} + \rho_i \boldsymbol{E}_{i+1,1}\big)$*, где* $\boldsymbol{E}_{jk}$ *есть матрица, все элементы которой – нули, за исключением* (j,k)*-ого, равного 1;*

(c) задано локальное поведение $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$ *в окрестностях точек* $\{a_i, b_i\}$ *(зависит от их расположения и локального поведения в этих окрестностях мер ортогональности).*

Обратно, если решение RHP-$\boldsymbol{Y}$ *существует, то оно обязательно имеет вид* (3.2)*, где* $Q_{\vec{n}}$ *и* $R_{\vec{n}-\vec{e}_i}^{(i)}$ *удовлетворяют* (3.1)*.*

3.2. Рекуррентные коэффициенты и $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$. Теперь выразим рекуррентные коэффициенты $\alpha_{\vec{n},i}, \beta_{\vec{n},i}$ через элементы матрицы $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$. Для этого определим

$$h_{\vec{n},i} := \int Q_{\vec{n}}(x) x^{n_i} \mathrm{d}\sigma_i(x).$$

Используя ортогональные соотношения (1.6), можно удостовериться, что

$$R_{\vec{n}}^{(i)}(z) = -\frac{h_{\vec{n},i}}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{z^{n_i+1}} + \mathcal{O}\big(z^{-n_i-2}\big).$$

В частности, имеем, что $m_{\vec{n},i} = -2\pi\mathrm{i}/h_{\vec{n}-\vec{e}_i,i}$. Допустим, что (3.1) выполнено. Известно [11, Теорема 23.1.11], что

$$\alpha_{\vec{n},i} = h_{\vec{n},i}/h_{\vec{n}-\vec{e}_i,i} = \big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{1,i+1}\big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{i+1,1}, \tag{3.3}$$

где $[\boldsymbol{Y}]_{jk}$ есть (j,k)-ый элемент матрицы $\boldsymbol{Y}$ и

$$\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}(z)z^{-\sigma(\vec{n})} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}z^{-1} + \mathcal{O}\big(z^{-2}\big). \tag{3.4}$$

Более того, можно легко проверить, используя определения $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$ и $\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}$, а также (1.7) (сравнивая коэффициенты, следующие после $z^{|\vec{n}|}$), что

$$\beta_{\vec{n},i} = \big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{1,1} - \big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}+\vec{e}_i}\big]_{1,1}. \tag{3.5}$$

3.3. Асимптотики $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$. Решение RHP-$\boldsymbol{Y}$ для больших $\vec{n}$, удовлетворяющих (2.2), было построено в [19]. Ниже мы приведем эту конструкцию. Задавая $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$, обозначим через

$$\vec{\omega}_{\vec{n}} = (\omega_{\vec{n},1}, \dots, \omega_{\vec{n},d}), \quad \mathsf{supp}(\omega_{\vec{n},i}) = \big[a_{\vec{n},i}, b_{\vec{n},i}\big] \subseteq [a_i, b_i],$$

вектор равновесных мер, минимизирующий функционал энергии (2.3), где $\vec{c}$ заменён вектором $\big(n_1/|\vec{n}|, \dots, n_d/|\vec{n}|\big)$. Риманова поверхность $\mathfrak{R}_{\vec{n}}$ определена абсолютно аналогично с $\mathfrak{R}$. Как и на $\mathfrak{R}$, определим $\Upsilon_{\vec{n},i}$, $i \in \{1, \cdots, d\}$, рациональную функцию на $\mathfrak{R}_{\vec{n}}$ с простым нулём на $\infty^{(0)}$, с простым полюсом в $\infty^{(i)}$, в других точках она ненулевая и конечна. Нормируется она так, что $\Upsilon_{\vec{n},i}(z^{(i)})/z \to 1$ при $z \to \infty$.

Задавая последовательность $\mathcal{N}$, как в Теореме 2.1, в [19] было показано, что RHP-$\boldsymbol{Y}$ решается для $|\,\vec{n}\,|$ достаточно большого и вблизи бесконечности выполняется

$$\boldsymbol{Y}_{\vec{n}} = \boldsymbol{G}^{-1}_{\vec{n}}(\infty)\boldsymbol{M}^{-1}_{\vec{n}}(\infty)\boldsymbol{Z}_{\vec{n}}\boldsymbol{M}_{\vec{n}}\boldsymbol{G}_{\vec{n}}, \tag{3.6}$$

с матрицей $\boldsymbol{Z}_{\vec{n}}$, удовлетворяющей $\boldsymbol{Z}_{\vec{n}}(\infty) = \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{Z}_{\vec{n}} = \boldsymbol{I} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})$ непрерывно в $\overline{\mathbb{C}}$ для некоторой последовательности $\varepsilon_{\vec{n}} \to 0$ при $|\,\vec{n}\,| \to \infty$, матрица $\boldsymbol{M}_{\vec{n}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} S_{\vec{n}}\big(z^{(0)}\big) & S_{\vec{n}}\big(z^{(1)}\big)/w_{\vec{n},1}(z) & \cdots & S_{\vec{n}}\big(z^{(d)}\big)/w_{\vec{n},d}(z) \\ \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},1}\big)\big(z^{(0)}\big) & \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},1}\big)\big(z^{(1)}\big)/w_{\vec{n},1}(z) & \cdots & \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},1}\big)\big(z^{(d)}\big)/w_{\vec{n},d}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},d}\big)\big(z^{(0)}\big) & \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},d}\big)\big(z^{(1)}\big)/w_{\vec{n},1}(z) & \cdots & \big(S_{\vec{n}}\Upsilon_{\vec{n},d}\big)\big(z^{(d)}\big)/w_{\vec{n},d}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где функции $w_{\vec{n},i}(z) := \sqrt{(z-a_{\vec{n},i})(z-b_{\vec{n},i})}$ голоморфны вне $\big[a_{\vec{n},i}, b_{\vec{n},i}\big]$ и нормированы так, что $w_{\vec{n},i}(z)/z \to 1$ при $z \to \infty$ и функции $S_{\vec{n}}$ стремятся вблизи каждой $\infty^{(k)}$ к ненулевой голоморфной функции, и

$$\boldsymbol{G}_{\vec{n}}(z) := \mathsf{diag}\left(\Phi_{\vec{n}}\big(z^{(0)}\big), \dots, \Phi_{\vec{n}}\big(z^{(d)}\big)\right) z^{-\sigma(\vec{n})}, \quad \Phi_{\vec{n}} = \prod_{i=1}^{d} \Upsilon^{-n_i}_{\vec{n},i}. \tag{3.8}$$

3.4. Асимптотики рекуррентных коэффициентов. Остаётся только вычислить нужные нам элементы $\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}$ посредством (3.6). Пусть матричная функция $\boldsymbol{A}$ голоморфна на бесконечности, запишем $\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{A}^0 + \boldsymbol{A}^1 z^{-1} + \mathcal{O}\big(z^{-2}\big)$. Тогда,

$$\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}} = \boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}} + \boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\boldsymbol{G}^1_{\vec{n}} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}. \tag{3.9}$$

Так как $\boldsymbol{G}_{\vec{n}}$ и $\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}$ – диагональные матрицы, из (3.9) следует, что

$$\big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{1,1} = \frac{\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{1,1}}{\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}} + \frac{\big[\boldsymbol{G}^1_{\vec{n}}\big]_{1,1}}{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}}).$$

Так как $S_{\vec{n}}\big(z^{(0)}\big)$ образует сходящуюся последовательность на бесконечности и $S_{\vec{n}+\vec{e}_i}\big(z^{(0)}\big)$ сходится к тому же пределу (предел зависит только от весовых коэффициентов ρ_i в (2.6) и $\vec{c}$ в (2.2)), мы получим:

$$\beta_{\vec{n},i} = \frac{\big[\boldsymbol{G}^1_{\vec{n}}\big]_{1,1}}{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}} - \frac{\big[\boldsymbol{G}^1_{\vec{n}+\vec{e}_i}\big]_{1,1}}{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}+\vec{e}_i}\big]_{1,1}} + o(1)$$

из (3.5). Запишем $z\Upsilon_{\vec{n},i}\big(z^{(0)}\big) = u_{\vec{n},i}\big(1 + v_{\vec{n},i}z^{-1}\big) + \mathcal{O}\big(z^{-2}\big)$. Тогда можно получить, что

$$\big[\boldsymbol{G}_{\vec{n}}\big]_{1,1}(z) = \prod_{i=1}^{d} u^{-n_i}_{\vec{n},i}\left(1 - \sum_{i=1}^{d} n_i v_{\vec{n},i} z^{-1} + \mathcal{O}\big(z^{-2}\big)\right).$$

Подставляя это разложение в асимптотическую формулу для $\beta_{\vec{n},i}$, получим

$$\beta_{\vec{n},i} = v_{\vec{n},i} + o(1).$$

В [19] было объяснено, что $\Upsilon_{\vec{n},i}\big(z^{(0)}\big) = (1 + o(1))\Upsilon_i\big(z^{(0)}\big)$ вблизи бесконечности. Следовательно, $u_{\vec{n},i} \to \alpha_{\vec{c},i}$ и $v_{\vec{n},i} \to \beta_{\vec{c},i}$, из чего вытекает второй предел в (2.7). Далее, мы выводим из (3.9), что

$$\big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{1,i+1} = \frac{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}\Big(\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{1,i+1} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}\Big)}{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}}$$

и

$$\big[\boldsymbol{Y}^1_{\vec{n}}\big]_{i+1,1} = \frac{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}\Big(\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{i+1,1} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}\Big)}{\big[\boldsymbol{G}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}}.$$

Имеем из (3.3): $\alpha_{\vec{n},i} = \frac{\Big(\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{1,i+1} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}\Big)\Big(\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{i+1,1} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\vec{n}})\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}\Big)}{\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{1,1}\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{i+1,i+1}}$. Так как $\big[\boldsymbol{M}^0_{\vec{n}}\big]_{j+1,j+1} = S_{\vec{n}}\big(\infty^{(j)}\big)$, $\quad\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{1,j+1} = S_{\vec{n}}\big(\infty^{(j)}\big)$, и $\big[\boldsymbol{M}^1_{\vec{n}}\big]_{j+1,1} = u_{\vec{n},j}S_{\vec{n}}\big(\infty^{(0)}\big)$, первый предел в (2.7) получается, если вспомнить, что все приведенные выше числа образуют сходящиеся последовательности при $|\,\vec{n}\,| \to \infty$.

3.5. Асимптотики коэффициентов лестничных рекуррентных соотношений. Пусть $n = md + i$, $i \in \{0, \cdots, d-1\}$. Из (1.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} zP_n(z) &= P_{n+1}(z) + \beta_{\vec{i}(n),i+1} P_n(z) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{\vec{i}(n),j} Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j}(z) \\ &\approx P_{n+1}(z) + \beta_{i+1} P_n(z) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_j Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j}(z), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где мы заменили коэффициенты $\alpha_{\vec{i}(n),k}$ и $\beta_{\vec{i}(n),k}$ их пределами для упрощения записи (взятие предела обосновано ввиду выполнения конечного числа алгебраических действий и перехода к пределу $(\vec{i}(n) + \vec{i})/n \to (1/p, \ldots, 1/d)$ для любого фиксированного вектора $\vec{i}$). Так как сумма в (3.10) имеет степень самое большее $n-1$, то первый предел в (2.10) доказан. Теперь эта же сумма может быть записана как

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j} = \alpha_i P_{n-1} + \sum_{j \neq i} \alpha_j Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j}, \tag{3.11}$$

где теперь мы понимаем индексы циклически в пределах $\{1, \cdots, d\}$. Из (1.7) следует, что

$$0 = Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j} - Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_i} + \big(\beta_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\vec{e}_i,i} - \beta_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\vec{e}_i,j}\big) Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\vec{e}_i}. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j} \approx \sum_{j=1}^{d} \alpha_j P_{n-1} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_j (\beta_j - \beta_i) Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\vec{e}_i}. \tag{3.13}$$

Так как последняя сумма в (3.13) имеет степень самое большее $n-2$, второй предел в (2.10) доказан. Для доказательства остальных случаев воспользуемся методом индукции. Как и в (3.12), мы имеем, что

$$\begin{aligned} 0 = Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-2}\vec{e}_{i-l}} &- Q_{\vec{i}(n)-\sum_{l=0}^{k-1}\vec{e}_{i-l}} \\ &+ \big(\beta_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-1}\vec{e}_{i-l},i-k+1} - \beta_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-1}\vec{e}_{i-l},j}\big) Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-1}\vec{e}_{i-l}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\prod_{l=0}^{k-2}(\beta_j-\beta_{i-l})Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-2}\vec{e}_{i-l}}\approx\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\prod_{l=0}^{k-2}(\beta_j-\beta_{i-l})P_{n-k}+$$
$$+\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\prod_{l=0}^{k-1}(\beta_j-\beta_{i-l})Q_{\vec{i}(n)-\vec{e}_j-\sum_{l=0}^{k-1}\vec{e}_{i-l}},$$

что завершает доказательство Теоремы 2.2, так как последняя сумма есть полином степени $n-k-1$.

4. Задача рассеяния

4.1. Прямая и обратная спектральная задача. Во введении мы уже обсудили спектральную задачу для многомерного разностного оператора 2-го порядка вида (1.2), (1.9), (1.11), с потенциалом, удовлетворяющим (1.13). Каждый из этих операторов мы будем называть *d-мерным оператором Шрёдингера с ДИС-потенциалом* и обозначать Δ_d, при этом (1.2) реализует симметричную форму оператора, (1.9) – несимметричную форму Хессенберга, а (1.11) – систему "ласточкиных хвостов".

Повторим основные моменты предлагаемой спектральной задачи. Оператор Δ_d имеет обобщенный собственный вектор $\vec{Q}:=\pi$ в виде решетки СОМ-ов $\pi:=\{Q_{\vec{n}}\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$, совместно ортогональных относительно системы $\{\sigma_k\}_{k=1}^d$ спектральных мер (1.16) одномерных операторов JM_k, $k=1,\cdots,d$, задаваемых маргинальными матрицами Якоби (1.15), т.е. граничными матрицам Якоби, связывающими трехчленными рекуррентными соотношениями многочлены $\{Q_{\vec{n}}\}$, у которых все координаты мульти-индекса, кроме одной, равны нулю.

При этом в качестве входных данных прямой спектральной задачи (*операторные данны*е) можно брать не только всю решетку коэффициентов оператора $\left\{\alpha_{\vec{n},k},\beta_{\vec{n},k}\right\}_{\vec{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$, $k=1,\cdots,d$, но и лишь ее маргинальную часть $\left\{\alpha_{\vec{0}+ne_k,k},\beta_{\vec{0}+ne_k,k}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, или коэффициенты $\{\gamma_{n,k}\}_{k=0}^d$ лестничных рекурренций (2.8), имея ввиду, см. [10], алгоритмы восстановления всей решетки по этим частичным данным.

Напомним, что в качестве спектральных данных (1.16) мы зафиксировали систему маргинальных спектральных мер $\{\sigma_k\}_{k=1}^d$. Также в качестве спектральных данных мы можем брать их преобразования Коши (маргинальные резольвентные функции)

$$\hat{\sigma}_k(z):=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{d}\sigma_k(x)}{x-z},\quad k=1,\cdots,d, \tag{4.1}$$

скачок которых вдоль носителей восстанавливает сами меры.

Эти спектральные данные восстанавливают весь ДИС-потенциал многомерного оператора Δ_d. Например, сначала решаются d одномерных задач восстановления d матриц Якоби JM_k по d - мерам ортогональности, потом решается з адача Коши для ДИС (1.13). Можно и по-другому. По преобразованиями Коши (4.1) с помощью алгоритма Якоби -Перрона разложения в векторную непрерывную дробь [15] получаются операторные данные $\{\gamma_{n,k}\}_{k=0}^{d}$.

Отметим два замечания, касающиеся рассматриваемых в работе операторов со спектральными данными, образующими систему Анжелеско (2.1).

Замечание 4.1. *Нетрудно сформулировать условия на коэффициенты маргинальных матриц Якоби для того, чтобы спектральные данные были бы из класса Анжелеско. Это, во-первых, будут условия на пределы коэффициентов, которые, как известно, описывают положение отрезка носителя меры для ортогональных многочленов. Во-вторых, можно привлечь известные достаточные условия отсутствия у меры ортогональности дискретных масс.*

Замечание 4.2. *Теорема 2.1 описывает пределы ДИС-потенциалов вдоль лучей, лежащих внутри решетки $\mathbb{Z}_+^d$. Однако если сравнить предельные значения, соответствующих величин при стремлении луча к маргинальному, граничному положению, с пределами матриц Якоби, многочленов ортогональных на отрезке, то можно увидеть совпадение сравниваемых величин.*

4.2. Прямая и обратная задача рассеяния. Переходим к рассеянию. Мы сосредоточимся на связи спектральных данных и данных рассеяния.

В одномерном случае $d = 1$ эта связь осуществляется посредством функции Сегё, описывающей сильную асимптотику ортогональных многочленов. Модуль этой функции на спектре определяет плотность спектральной меры, а ее аргумент выражает фазу рассеяния (подробнее см. [13], [5]).

Конечно, и в многомерном случае мы можем взять d маргинальных данных рассеяния, и, решив d одномерных обратных задач, найти d маргинальных матрицы Якоби JM_k, $k = 1, \cdots, d$, что ввиду глобального решения задачи Коши (1.13) полностью восстанавливает ДИС-потенциал.

Мы предложим здесь другой подход, позволяющий решать одну задачу рассеяния, восстановления оператора по асимптотике обобщенного собственного вектора (решетки) $\vec{Q} := \pi$, когда пространственная переменная $\vec{n}$ уходит на бесконечность по одному фиксированному "лучу" решетки Z_+^d, а спектральная переменная по очереди рассматривается на носителях спектральных данных, т.е. носителях маргинальных спектральных мер.

Чтобы ввести данные рассеяния для этого подхода рассмотрим асимптотику $Q_{\vec{n}}$ при $|\vec{n}| \to \infty$, а последовательность мультииндексов $\vec{n}$ определена в (2.2). Искомая асимптотика содержится в формуле (3.6), так как многочлен $Q_{\vec{n}}$ является элементом $(1,1)$ матрицы $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$, см. (3.2). В отличие от задачи о пределе (в рассматриваемом режиме) потенциала Δ_d, для описания асимптотики $Q_{\vec{n}}$ нам потребуется детальная информация об аналоге функции Сегё $S_{\vec{n}}$ из асимптотической формулы (3.6), (3.7) для матрицы $\boldsymbol{Y}_{\vec{n}}$. Справедливо

Предложение 4.1. *Пусть веса ρ_i из* (2.6) *голоморфны и не обращаются в нуль в некоторой окрестности $[a_i, b_i]$, и пусть ветви*

$$w_i(z) := \sqrt{(z - a_{\vec{c},i})(z - b_{\vec{c},i})}, \forall\, i \in \{1, \dots, d\}, \tag{4.2}$$

голоморфные вне $\left[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\right]$, нормированы в бесконечности: $w_i(z)/z \to 1$.

Тогда существует единственная функция S, не зануляющаяся и голоморфная на рассеченной римановой поверхности $\mathfrak{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \boldsymbol{\Delta}_i$, такая, что

$$S_{\pm}^{(i)} = S_{\mp}^{(0)}\big(\rho_i w_{i+}\big) \quad \text{на} \quad \big(a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\big), \quad \text{и} \quad \prod_{k=0}^{d} S^{(k)}(z) \equiv 1, \tag{4.3}$$

а также при $z \to e \in \left\{a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}\right\}$ выполнено $\left|S^{(0)}(z)\right| \sim \left|S^{(i)}(z)\right|^{-1} \sim |z-e|^{-1/4}$.

Теперь можно привести доказанную в [19] асимптотическую формулу для $Q_{\vec{n}}$ при $|\vec{n}| \to \infty$ вдоль луча (2.2)

$$\begin{cases} Q_{\vec{n}} \;=\; C_{\vec{n}}\big[1 + o(1)\big]\big(S\Phi_{\vec{n}}\big)^{(0)}, & \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^{d}[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}], \\ Q_{\vec{n}} \;=\; C_{\vec{n}}\big[1 + o(1)\big]\big(S\Phi_{\vec{n}} + \overline{S\Phi_{\vec{n}}}\big)^{(0)}, & \text{на } K \Subset \bigcup_{i=1}^{d}[a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}], \end{cases} \tag{4.4}$$

где $\Phi_{\vec{n}}$ из (3.8), S в w_i из Предложения 4.1, и $\lim_{z\to\infty} C_{\vec{n}}\big(S\Phi_{\vec{n}}\big)^{(0)}(z) z^{-|\,\vec{n}\,|} = 1$.

Имеем, что многочлен $Q_{\vec{n}}$ разлагается на (monic) многочлены

$$Q_{\vec{n}} = Q_{\vec{n},1} Q_{\vec{n},2} \dots Q_{\vec{n},d} \tag{4.5}$$

так, что $\mathsf{deg} Q_{\vec{n},j} = n_j$ и все нули многочлена $Q_{\vec{n},j}$ принадлежат носителю маргинальной спектральной меры, т.е. отрезку $[a_j, b_j]$. Профакторизуем, в соответствии с (4.5), асимптотическую формулу (4.4) для $Q_{\vec{n}}$. Получим

$$Q_{\vec{n},j}(z) = C_{\vec{n},j}(1 + o(1))\, S_j(z)\, \Phi_{\vec{n},j}(z)\,, \quad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}]$$

и

$$Q_{\vec{n},j}(x) = C_{\vec{n},j}(1 + o(1))\, \big(S_j(x)\, \Phi_{\vec{n},j}(x) + \overline{S_j(x)\, \Phi_{\vec{n},j}(x)}\big)\,, \quad x \in K \Subset [a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}]\,,$$

где

$$\Phi_{\vec{n},j} = \left(\Phi_{\vec{n}}^{-1}\right)^{(j)}, \qquad S_j = \left(S^{-1}\right)^{(j)}, \qquad j \in \{1, \dots, d\}\,.$$

Сменим нормировку многочленов $Q_{\vec{n},j} =: C_{\vec{n},j} q_{\vec{n},j}$ и образуем аналоги функций Йоста

$$\Psi_{\vec{n},j} := \psi_{\vec{n},j} \left| \prod_{i=1,\, i\neq j}^{d} \psi_{\vec{n},i} \right|^{1/2}, \qquad \psi_{\vec{n},i} := \frac{q_{\vec{n},j}}{S_j},$$

которые будут иметь асимптотики

$$\Psi_{\vec{n},j}(x) \;=\; \exp(i\theta_{\vec{n},j}(x)) + \frac{S_j}{\overline{S_j}} \exp(i\theta_{\vec{n},j}(x)) + o(1)\,, \quad x \in K \Subset [a_{\vec{c},i}, b_{\vec{c},i}]\,, \tag{4.6}$$

где функция $\theta_{\vec{n},j}(x)$ вещественнозначная, так как

$$\exp(i\theta_{\vec{n},j}) \;:=\; \left(\left(\overline{\Phi_{\vec{n}}^{-1}}\right)^{(0)} \left(\Phi_{\vec{n}}^{-1}\right)^{(j)}\right)^{1/2} \left| \prod_{i=1,\, i\neq j}^{d} \left(\Phi_{\vec{n}}^{-1}\right)^{(i)} \right|^{1/2}, \qquad \text{на} \quad (a_{\vec{c},j}, b_{\vec{c},j}).$$

Итак, асимптотическая формула (4.6) дает решение прямой задачи рассеяния, а равные по модулю единице функции $\{S_j/\overline{S_j}\}_{j=1}^d$ будут данными рассеяния. Также к данным рассеяния следует отнести предел потенциала при $|\vec{n}| \to \infty$ вдоль луча (2.2). Как следует из Теоремы 2.1, эти пределы однозначно связаны с набором отрезков $\{(a_{\vec{c},j}, b_{\vec{c},j})\}_{j=1}^d$ носителей равновесной меры (2.4) и с режимом $\theta_{\vec{n},j}(x)$ нелинейной одномерной волны в (4.6).

Обратная задача рассеяния (как и в случае матрицы Якоби (1.3)) решается процедурой восстановления модулей функций Сегё $\{S_j\}_{j=1}^d$ по их аргументам (данным рассеяния), что ввиду (4.3) восстанавливает маргинальные спектральные меры на носителях равновесной меры $\{(a_{\vec{c},j}, b_{\vec{c},j})\}_{j=1}^d$. Тем самым, при отсутствии сталкивания равновесной меры, т.е. при совпадении множеств $\{(a_{\vec{c},j}, b_{\vec{c},j})\}_{j=1}^d$ и $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^d$ по данным рассеяния полностью восстанавливаются спектральные данные, и задача восстановления коэффициентов оператора может быть теперь решена с помощью обратной спектральной задачи. При наличии сталкивания следует подобрать наклон луча, т. е. $\vec{c}$ чтобы добиться совпадения множеств носителя вектора маргинальных спектральных мер и носителя векторной равновесной меры. Справедливо

Предложение 4.2. *В задаче равновесия* (2.3) *при* $d = 2$ *существует* $\vec{c}$, *такой, что выполняется* $(a_{\vec{c},j}, b_{\vec{c},j}) = (a_j, b_j)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. При $c_1 = 0$ с отрезка (a_1, b_1) сталкивается вся мера, то же происходит и на (a_2, b_2) при $c_2 = 0$. Поэтому из топологических соображений следует, что для справедливости Предложения нам надо доказать, что не может быть сталкивания меры с обоих отрезков одновременно. Пусть это все же произошло. Рассмотрим в дырке между носителями равновесной меры поведение равновесной (на $[a_1, b_1]$) комбинации потенциалов равновесной меры $W_1 := 2V[\omega_1] + V[\omega_2]$, где $V[\nu] := -\int \log|z-t| d\nu(t)$. Имеем, что W_1 – выпуклая вниз функция, и ввиду сталкивания меры в окрестности b_1 из соответствующей точки сталкивания b_* она выходит с нулевой производной. Добавим к W_1 функцию $3V[\omega_2]$, которая тоже выпукла вниз. Сумма будет равна $2W_2$, но очевидно, что её производная не может занулятся в точке сталкивания a_* на втором отрезке. Противоречие. ■

4.3. Конечные срезки операторов Шредингера и функция Грина. В теории рассеяния для оператора Шредингера функция Грина играет ключевую роль. В одномерном случае есть чёткое понимание связи ортогональных полиномов с функциями Грина урезанной матрицы Якоби. В самом деле, из рекурсии

$$P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + d_n P_{n-1}(x) = x P_n(x), \quad P_{-1}(x) = 0$$

мы получаем

$$J(P_0, \ldots, P_{N-1})^t = x(P_0, \ldots, P_{N-1})^t - P_N(x)(0, \ldots, 1)^t$$

где J–трехдиагональная матрица размера $N \times N$. Это дает представление

$$P_N(x) = \mathsf{det}(xI - J)$$

в силу нормализации $P_n(x) = x^n + \ldots$ и привязывает нули полинома к спектру матрицы J. Также из этой формулы четко видно, что

$$G_n(x) = -\frac{P_n(x)}{P_N(x)},$$

где функция Грина $G_n(x)$ решает задачу

$$(J - xI)G_n(x) = \delta_{N-1}.$$

В случае совместно-ортогональных многочленов аналогичное представление тоже возможно. Рассмотрим, например, случай $d = 2$. Как было указано выше, СОМ-ы $P_{n,m}$ удовлетворяют рекурренциям

$$xP_{n,m} = P_{n+1,m} + \beta^{(1)}_{n,m} P_{n,m} + \alpha_{n,m} P_{n-1,m} + \gamma_{n,m} P_{n,m-1}, \quad n, m = 0,1,\ldots \quad (4.7)$$

и

$$xP_{n,m} = P_{n,m+1} + \beta^{(2)}_{n,m} P_{n,m} + \alpha_{n,m} P_{n-1,m} + \gamma_{n,m} P_{n,m-1}, \quad n,m = 0,1,\dots, \quad (4.8)$$

где $P_{-1,m} = P_{n,-1} = 0$ по определению. Рассмотрим невырожденный (эллиптический) случай, когда коэффициенты $\gamma_{n,m}, \alpha_{n,m}$ положительны.

Для произвольных $N, M > 1$ рассмотрим прямоугольник $0 \le n \le N-1, 0 \le m \le M-1$ и зададим оператор J на $\mathbb{C}^{NM}$ следующим образом. В случае, когда точка (n,m) : $n \le N-2, m \le M-2$, возьмем выпуклую комбинацию (4.7) и (4.8). Получаем

$$xP_{n,m} = \tau_{n,m} P_{n+1,m} + (1-\tau_{n,m}) P_{n,m+1} + (\tau_{n,m}\beta^{(1)}_{n,m} + (1-\tau_{n,m})\beta^{(2)}_{n,m}) P_{n,m} + \alpha_{n,m} P_{n-1,m} + \gamma_{n,m} P_{n,m-1},$$

где $\tau_{n,m} \in (0,1)$ – произвольно. Далее, для индексов $n = N-1, m \le M-2$ мы должны использовать уравнение (4.8) для задания оператора, а для $n \le M-2, m = N-1$ - уравнение (4.7). Остается определить оператор в узле $(N-1, M-1)$. Мы опять можем взять для этого произвольную выпуклую комбинацию (4.7) и (4.8) с коэффициентом $\tau_{N-1,M-1} \in [0,1]$. В конечном итоге мы получим оператор J, зависящий от параметров $\tau_{n,m}$. Кроме того, вектор из полиномов $\{P_{n,m}\}$ будет удовлетворять уравнению

$$(x-J)\vec{P} = \tau_{N-1,M-1}\delta_{N,M-1}P_{N,M-1} + (1-\tau_{N-1,M-1})\delta_{M-1,N}P_{M-1,N}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим, например, случай $\tau_{N-1,M-1} = 0$. Непосредственно из представления (4.9) мы получаем

Лемма 4.1. *Полином $P_{N,M-1}$ делит определитель оператора J. В частности, все нули $P_{N,M-1}$ являются собственными значениями J. Кроме того, если $x \notin \sigma(J)$ (спектр J) и $G_{n,m}$ обозначает функцию Грина в точках (n,m) и $(N-1, M-1)$, т.е.*

$$(J - xI)G_{n,m}(x) = \delta_{N-1,M-1}, \quad \text{\textit{тогда}} \quad G_{n,m}(x) = -\frac{P_{n,m}(x)}{P_{N,M-1}(x)}.$$

В частности, при $n = m = 0$,

$$-\frac{1}{P_{N,M-1}(x)} = G^*_{N-1,M-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, x \notin \sigma(J),$$

где G^* решает

$$(J^* - xI)G^* = \delta_{0,0}.$$

Обратим внимание что J - дискретный (вообще говоря, несимметричный) оператор Шредингера на прямоугольнике $(N-1)\times(M-1)$.

Вопрос. *Всегда ли можно выбрать параметры $\{\tau\}$ таким образом, чтобы оператор J был подобен симметричному (и, соответственно, чтобы спектр J был вещественнен)?*

Список литературы

[1] A. Angelesco, *Sur deux extensions des fractions continues algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris **168** (1919), 262–265.

[2] A.I. Aptekarev, M. Derevyagin, W. van Assche, *On 2D discrete Schrödinger operators associated with multiple orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 065201.

[3] A.I. Aptekarev, M. Derevyagin, W. van Assche, *Discrete integrable systems generated by multiple orthogonal polynomials*, arXiv:1409.4053.

[4] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, G. López Lagomasino, and I. A. Rocha, *On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **139**, (2006), 346—370.

[5] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, *Задача рассеяния дискретного оператора Штурма–Лиувилля,* Матем. сб., **121**(163) (1983), 327–358.

[6] A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *Discrete Panlevл'e equations and their appearance in quantum gravity*, Comm. Math. Phys., **142**(2), 1991, 313—344.

[7] A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravitation*, Comm. Math. Phys., **147**(2), 1992, 395—430.

[8] J.S. Geronimo, A.B. Kuijlaars, and W. Van Assche, *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials,* In Special functions 2000: current perspective and future directions, number 30 in NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 23–59.

[9] A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, *On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **157** (1981), 31–48; English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. **157** (1983), 31–50.

[10] G. Filipuk, M. Haneczok, W. Van Assche, *Computing recurrence coefficients of multiple orthogonal polynomials*, Numer. Algorithms 70 (2015), 519-543.

[11] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantuum Orthogonal Polynomials in One Variable,* volume **98** of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2005.

[12] K. Mahler, *Perfect systems*, Compositio Math. **19** (1968), 95–166.

[13] Е. М. Никишин, *Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функции*, Тр. семинара им. И. Г. Петровского, **10** 1984, 3–77; English transl. J. Soviet Math., **35** 5 1986

[14] VS Rabinovich, S Roch, *The essential spectrum of Schrödinger operators on lattices.* J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), no. 26, 8377–8394.

[15] V. I. Parusnikov, The Jacobi-Perron algorithm and simultaneous approximation of functions, Mat. Sb., 114 (156) 1981, 322–333; English transl. Math. USSR Sb., 42 1982

[16] M Reed, B Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.

[17] MA Shubin, *Discrete magnetic Laplacian*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 259–275.

[18] W. Van Assche, *Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials* J. Approx. Theory **163** (10), (2011), 1427–1448.

[19] M. Yattselev, *Strong asymptotics of Hermite-Padé approximants for Angelesco systems*, Accepted for publication in J. of Canadian Math. Soc., http://arxiv.org/abs/1507.07596